Kombinatorika előadás jegyzet

2014. 03. 31. Előadó: Hajnal Péter

Jegyzetelő: Molnár Fanni Iringó

<u>Emlékeztető:</u> G gráf V, E, I

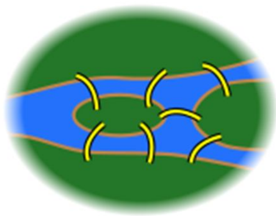
V(G)

véges csúcs/ él halmazok

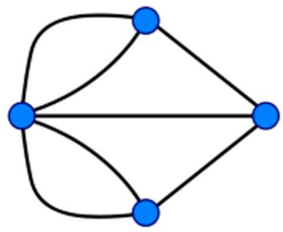
illeszkedés e $\in E \mapsto 2\ db$ (esetleg egybeeső)
végpont 1 vagy 2 elemű

$\{\, x \in V \text{végpont}: x\ I\ e \,\}$

<u>Példa:</u>



gráfként



Königsberg városának központja

<u>Definíció:</u> Séta a G gráfban

$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_l, v_l$ sorozat

(1) $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_l \in V$

(2) $e_1, e_2, \ldots, e_l \in E$

(3) mindegyik e_i két végpontja v_{i-1} és v_i $(i = 1, 2, \ldots, l)$

<u>Definíció:</u> Sétálás a G gráfban

$t = 0,1,2, \ldots, l$ idő paraméter

$\forall\, t$ időpillanatban egy v_t csúcsban vagyunk

Kiválasztunk egy v_t-re illeszkedő élt (e_{t+1})

e_{t+1}-en áthaladunk a másik végpontba (v_{t+1}) pillanat

t+1-edik

<u>Definíció:</u> S séta $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_l, v_l)$ vonal, ha
az e_i élek közt nincs ismétlődés ($i \neq j \Rightarrow e_i \neq e_j$)

<u>Definíció:</u> S séta út, ha a v_i csúcsok közt nincs ismétlődés.

<u>Észrevétel:</u> S út $\Rightarrow$ S vonal

<u>Bizonyítás:</u> Indirekt módon

Tegyük fel, hogy <u>S út</u> és él ismétlés történik

S: $v_0\ e_1\ v_1\ e_2\ v_2 \ldots e_i \ldots e_j \ldots e_l\ v_l$ $\quad i < j$ és $e_i = e_j$

e 2 végpontja

v_{i-1} $e_i = e$ egyik végpontja, tehát v_{i-1} e_j mellett is szerepel. CSÚCSISMÉTLÉS ↯

<u>Nyelvezet:</u> S: $u = v_0, e_1, v_1, \ldots, e_l, v_l = w$

S u w séta (u-ból induló, w-be vezető séta)

$l = S$ séta hossza // $l = 0$ lehetséges S:v_0

Lemma: G-ben $\exists\ x\ y$ séta $\Rightarrow \exists\ x\ y$ út

Bizonyítás: S xy séta

$x = v_0 e_1 v_1 v_i \ldots v_j e_l v_l = y$

1. eset: Ha nincs csúcsismétlés, akkor sétánk út és bizonyítja az állítást.

2. eset: Ha van csúcsismétlés

S' séta $\bar{x} = \overset{S}{\overset{||}{v_0}} \overline{\ldots} \underset{\underset{v_j}{||}}{v_i} \quad e_{j+1} v_{j+1} \ldots e_l v_l = y$

S'-ről látható, hogy:

(i) xy séta,

(ii) S' hossza < S hossza.

Ezek után a bizonyítás befejezésére két lehetőségünk van:

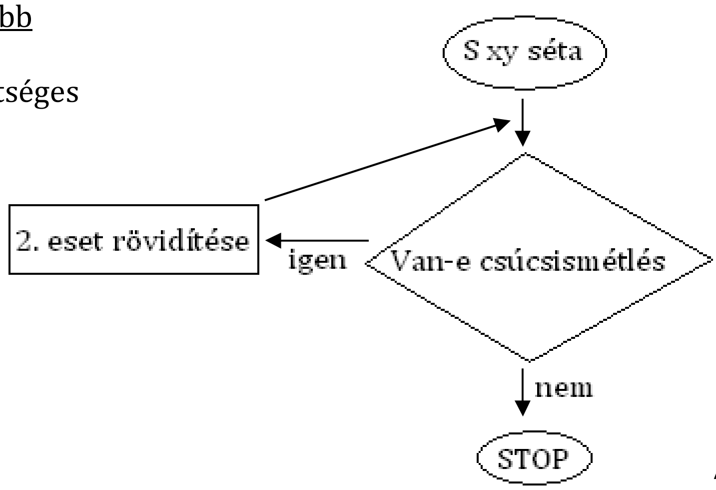
matematikai

Vegyük a legrövidebb S xy sétát.

csak az 1. eset lehetséges

van egy xy út

algoritmikus



// xy utunk van

Ez az algoritmus leáll ≡ *nincs végtelen ciklus*

N egy nem üres részhalmazának ∀ van legkisebb eleme

Definíció: $x, y \in V \quad x \sim y$ x-ből elérhető y $\overset{def.}{\Longleftrightarrow} \exists\ xy$ séta

Tétel:

(i) $x \sim x$

(ii) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$

(iii) $x \sim y$ és $y \sim z \Rightarrow x \sim z$

Definíció: R reláció egy H halmaz elemei közt R ekvivalencia reláció, ha

(i) x R x

(ii) x R y ⇒ y R x

(iii) x R y, y R z ⇒ x R z

Példa: H egy általános iskola tanulói
R „ osztálytárs” ≡ ugyanabba az osztályba jár

Tétel: „ A fenti példa univerzális példa”
≡ R ekvivalencia reláció H-n, akkor H osztályokra bontható úgy, hogy R relációban állni = „ugyanahhoz az osztályhoz tartozni”

Következmény: Minden G gráf csúcshalmaza osztály(ok)ba sorolható úgy, hogy $x, y \in V$ egy osztályba esnek, akkor $x \sim y$
$x, y \in V$ különböző osztályokba esik, akkor $x \nsim y$

Definíció: G gráf összefüggő, ha tetszőleges csúcsából bármelyikbe el tudunk sétálni ($\forall\, x, y \in V \quad x \sim y$)

G gráf NEM összefüggő (öf.) ⇔ csúcsai 2 osztályba sorolhatók úgy, hogy a két osztály közt ne haladjon él.

Definíció: $\vec{G}$ irányított gráf
V csúcshalmaz
E élhalmaz
$\left.\begin{matrix} K \\ B \end{matrix}\right\}$ 2 illeszkedési reláció csúcsok - élek közt
u K e = e kivezet u – ból
v B f = f bevezet v – be
K és B olyan, hogy ∀ e él pont egy csúcsba fut be és pont egy csúcsból fut ki

Definíció: $v_0\, e_1\, v_1, \ldots, e_l, v_l$ irányított séta
- (i) $v_0, v_1, \ldots, \in V$
- (ii) $e_1, \ldots, \in E$
- (iii) e_i kifut v_{i-1} – ből
  befut v_i - be

Definíció: $\vec{G}$ irányított értelemben erősen összefüggő $\overset{def.}{\iff} \forall\, x\, \forall y \in V$
x – ből van irányított séta y – ba.